Werner Kratz
Marius Hofert

Universität Ulm
Wintersemester 2008/2009
23.10.2008

Übungen zur Analysis 2

Blatt 3

Abgabe und Besprechung, Donnerstag, den 30.10.2008

Aufgabe 12 (2 Punkte)

Es seien $f, g \in R[a, b]$. Zeige: $f^+ \in R[a, b]$ und $\max\{f, g\} \in R[a, b]$.

Hinweis

$f^+ := \max\{f, 0\} = \frac{1}{2}(f + |f|)$ und $\max\{f, g\} = f + (g - f)^+$.

Aufgabe 13 (4 Punkte)

Es sei $f \in C[a, b]$. Zeige:

(a) Ist $f(x) \geq 0$ für $x \in [a, b]$ und

$$\int_a^b f(x)\, dx = 0,$$

so ist $f(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$.

(b) Ist

$$\int_a^b f(x)g(x)\, dx = 0$$

für jede Funktion $g \in C[a, b]$, so ist $f(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$.

Aufgabe 14 (6 Punkte)

(a) Es sei $f \in C[a, b]$. Die Funktionen φ und ψ seien differenzierbar auf $[\alpha, \beta]$ mit $\varphi(x)$ und $\psi(x) \in [a, b]$ für alle $x \in [\alpha, \beta]$. Dann gilt

$$\frac{d}{dx} \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\, dt = f(\psi(x))\psi'(x) - f(\varphi(x))\varphi'(x) \text{ auf } [\alpha, \beta].$$

(b) Zeige: $\frac{d}{dx} \int_{\cos x}^{\sin x} \arcsin t\, dt = x \cos x + (\frac{\pi}{2} - |x|) \sin x$ für alle $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Aufgabe 15 (Lineare Differentialgleichung 1. Ordnung) (8 Punkte)

(a) Es seien $f, g \in C(I)$, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$. Zeige, dass es genau eine Funktion (die sogenannte Lösung des Anfangswertproblems) $y \in C^1(I)$ gibt, für die gilt

$$y' = f(x)y + g(x) \text{ auf } I \text{ (d.h. } y'(x) = f(x)y(x) + g(x) \text{ für alle } x \in I) \text{ mit } y(x_0) = y_0,$$

und dass diese gegeben ist durch

$$y(x) = e^{F(x)}\Big(y_0 + \int_{x_0}^{x} g(t)e^{-F(t)}\,dt\Big) \text{ mit } F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt.$$

(b) Löse folgende Anfangswertprobleme:

(i) $y' = y + \frac{e^x}{1+x^2}$ mit $y(1) = 0$ für $x \in \mathbb{R}$.

(ii) $y' = \frac{y}{x} + x$ mit $y(1) = 0$ für $x > 0$.

Hinweis

Zu (a): Betrachte für die Eindeutigkeit die Hilfsfunktion $z(x) = e^{-F(x)}y(x)$ für eine Lösung y.

Aufgabe 16★ (2. Mittelwertsatz der Integralrechnung) (4 Punkte)

Es seien $f \in C^1[a, b]$, $g \in C[a, b]$, und f sei monoton auf $[a, b]$. Dann existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(b)\int_\xi^b g(x)\,dx + f(a)\int_a^\xi g(x)\,dx.$$

Hinweis

Wende auf $\int_a^b f'(x)G(x)\,dx$ für $G(x) := \int_a^x g(t)\,dt$ den 1. Mittelwertsatz der Integralrechnung an und integriere partiell.